

رياضيات
٢

امتحانات الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠١٦ / ٢٠١٧

جامعة البعث

المادة: نظرية القياس - السنة الثالثة رياضيات

كلية العلوم

العلامة: ١٠٠ درجة. المدة: ساعة ونصف. اسم الطالب:

قسم الرياضيات

السؤال الأول (٢٠ درجة): $(٥٠) = ٥ \times ٤$

اكتب العبارات التالية بشكل صحيح ودقيق:

(١) قياس ليبينغ في \mathbb{R} قد يكون منته أو σ -منته أو غير ذلك.

(٢) قياس الحد في \mathbb{R} قد يكون منته أو σ -منته أو غير ذلك.

(٣) كل σ -جبر هو صف دنكين وبالعكس.

(٤) دالة ديربيليه كمولة حسب ريمان وحسب ليبينغ والتكاملان متساويان.

(٥) مجموعة كانتور عدودة وقيوسة حسب ليبينغ وقياسها 10.

السؤال الثاني (٣٠ درجة):

(أ) عرف كلاً من: الحلقة، الجبر، σ -الحلقة، σ -الجبر. $(١٥) = ٥ \times ٣$

(ب) أثبت أن صف المجموعات العدودة في \mathbb{R} يشكل حلقة و σ -حلقة لكنه لا يشكل جبر أو σ -جبر. $(١٥) = ٥ \times ٣$

(ج) بفرض أن X مجموعة غير خالية، عين σ -الجبر الذي تولده الصفوف التالية:

$$(٥٦) = ٥ \times ١١ \quad \mathcal{H}_1 = \{X\}, \quad \mathcal{H}_2 = \{\emptyset\}, \quad \mathcal{H}_3 = \{\emptyset, X\}.$$

السؤال الثالث (٢٧ درجة):

(أ) عرف كلاً من: الخاصة تقريباً في كل مكان، الدالة القيوسة. $(٥٦) = ٥ \times ١١$

(ب) لتكن الدالتين المعرفتين على \mathbb{R} بالشكل:

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = \begin{cases} x & ; x \in \mathbb{N} \\ e^x & ; x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}. \end{cases}$$

(ج) أي منها مستمرة أو مستمرة تقريباً في كل مكان. $(٥٦) = ٥ \times ١١$

(د) هل هما متساويتان تقريباً في كل مكان على \mathbb{R} ؟ هل هما قيوستان؟ $(٥٨) = ٥ \times ١١$

السؤال الرابع (٢٣ درجة):

لتكن الدالتين المعرفتين على المجموعة $E = [0, 1]$ بالشكل:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & ; x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 0 & ; x = 0 \\ 1 + x^2 & ; 1 < x < 1 \\ 1 & ; x = 1. \end{cases}$$

أثبت أن هذه الدوال كمولة حسب ليبينغ على المجموعة المذكورة ثم احسب التكاملات التالية: $(٥١) = ٥ \times ١٠$

$$\int_{[0,1]} f(x) d\lambda, \quad \int_{[0,1]} g(x) d\lambda, \quad \int_{[0,1]} [f(x) + g(x)] d\lambda.$$

مدرس المادة: د. إبراهيم إبراهيم

مع التمنيات بالتوفيق والنجاح
محضر في ١٨ / ١ / ٢٠١٧.

①

تـ العـ
العلوم
الرياضيات

سـم النـصـيـحـي لـمـادـة نظريـة القياس
السنة الثالثة - رياضيات
الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠١٦ / ٢٠١٧

سؤال الأول (٢٠ درجة):

- ١) قياس σ ليس في R ليس منته و لكنه σ - منته
٢) قياس العد في R ليس منته وليس σ - منته .
٣) كل σ - هـر هو صف ذو نـكـيـة ، لكنـه العكـس غير صحيح .
٤) يكون صف ذو نـكـيـة σ - هـر إذا كان متفقاً بالنسبة للتقاطع المنته .
٥) دالة دير تخليه كونه صف ليس في وغير كونه صف رياضي .
٦) مجموعة كائنات غير معدودة لكنها مقبولة صف ليس في و صف رياضي .

السؤال الثاني (٢٠ درجة):

(١) الحلقة : الصف R بطول حلقة X إذا تحققت :
 $A \cup B \in R$, $A \cap B \in R$, $A \setminus B \in R$.

الجواب : هو حلقة فيها $X \in R$.

σ - الحلقة : الصف R بطول σ - حلقة X إذا تحققت :

١) $A \cup B \in R$, $A \cap B \in R$.

٢) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in R$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in R$.

σ - الجواب : هو σ - حلقة R فيها $X \in R$ (بوجود تعريف آخر) .

(٢) لنكـيـة الصف $\{A \mid A \subseteq R \text{ مجموعة معدودة}\} : H$.

حلقة : لنكـيـة $A, B \in H$ ، هذا يعني أن A, B مجموعتين معدودتين ، لذلك

يكون كل من $A \cup B$ و $A \cap B$ معدودين $\Leftrightarrow A \cup B \in H$ و $A \cap B \in H$.

σ - حلقة : يجب ما تقدم جاء به $A \cap B \in H$ من أجل أن $A, B \in H$.

لكن $A_1, A_2, \dots \in H$ ، هذا يعني أن كل A_i مجموعة معدودة وبالتالي

اجتماعها $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ مجموعة معدودة $\Leftrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in H$.

هـر : بما أن R مجموعة غير معدودة فإنه $R \notin H$ ، ليس هـر

σ - هـر : بما أن $R \notin H$ ، ليس σ - هـر .

⑤

هـ - الجيز المولد بالصنف هو:
 $\mathcal{F}_\sigma(\mathcal{H}_1) = \mathcal{F}_\sigma(\mathcal{H}_2) = \mathcal{F}_\sigma(\mathcal{H}_3) = \{\phi, X\}$.

سؤال الثالث (٧٠ درجة):

المقاريف:

نقول E خاصة P إننا محقة تقريباً في كل مكان E المجموعة E إذا تحققت ما يلي:

• توجد مجموعة جزئية $E_0 \subset E$ قياسها موجباً 0 .

• الخاصة P محقة على $E \setminus E_0$ غير محقة على E_0 .

نقول عن الدالة $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ إننا قياسية على E إذا كانت المجموعة $E(f > c)$ قياسية من أجل أي عدد حقيقي c .

(يمكن ذكر المجموعات: $E(f \geq c)$, $E(f < c)$, $E(f \leq c)$).

• الدالة $f(x) = e^x$ مستمرة في كل مكان على \mathbb{R} .

الدالة $g(x)$ مستمرة تقريباً في كل مكان على \mathbb{R} لأننا غير مستمرة على \mathbb{N} كما أنه $\lambda(\mathbb{N}) = 0$.

(ج) لدينا:

$$E_0 = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\} = \mathbb{N},$$

$$\lambda(E_0) = \lambda(\mathbb{N}) = 0,$$

$$f(x) = g(x) \neq e^x ; x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}.$$

لذلك $f \stackrel{q.e}{=} g$.

(د) الدالة $f(x)$ قياسية لأننا مستمرة.

الدالة $g(x)$ قياسية لأنه:

طريقة ١: لأنه $f \stackrel{q.e}{=} g$ طريقة ٢: $g(x)$ مستمرة على $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$

فهو قياسية على هذه المجموعة.

وبما أنه $\lambda(\mathbb{N}) = 0$ جاً $g(x)$ قياسية على \mathbb{N}

وبالتالي جاً $g(x)$ قياسية على \mathbb{R} .

$$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) \cup \mathbb{N} = \mathbb{R}.$$

دالة $f(x)$ هي دالة ديرنجليه وهي كونه صلب ليبنز لانها صيوسه ومحدودة .
تأملها:

$$\int_{[0,1]} f(x) d\lambda = \underbrace{\int_{[0,1] \cap \mathbb{Q}} f(x) d\lambda}_{=0} + \underbrace{\int_{[0,1] \setminus \mathbb{Q}} f(x) d\lambda}_{=0} = 0 + 0 = 0.$$

لأن $\lambda([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 0$ لأن $f(x) = 0$

الدالة $g(x)$ كونه صلب ليبنز لأنه:

طريقة ١: كونه صلب ريمان على $[0,1]$ لأننا مستمرة بالنقطة $\lambda(\{0,1\}) = 0$.
طريقة ٢: $g(x)$ مستمرة تقريباً في كل مكان مع $[0,1]$ صلب صيوسه وهي محدودة لأنه:

$$|g(x)| \leq 2 ; \forall x \in [0,1]$$

تأملها:

$$\int_{[0,1]} g(x) d\lambda = (R) \int_0^1 (1+x^2) dx = \left[x + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

يكون أيضاً:

$$\int_{[0,1]} [f(x) + g(x)] d\lambda = \int_{[0,1]} f(x) d\lambda + \int_{[0,1]} g(x) d\lambda = 0 + \frac{4}{3} = \frac{4}{3}.$$



مدرس المادة:
د. إبراهيم إبراهيم